3. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Umiejętności:

- wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej
- zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów opisanych za pomocą równań i nierówności typu: $|x-a|=b$, $|x-a|<b$, $|x-a|>b$

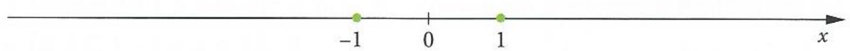
Definicja

Wartością bezwzględną liczby nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0 mierzoną w odcinkach jednostkowych. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

Przykład 1

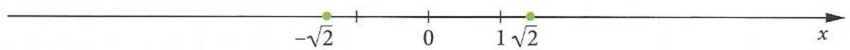
Zaznaczymy na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 1$

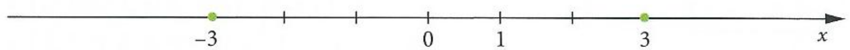


Są dwie liczby oddalone od zera o jedną jednostkę: 1 oraz –1.

b) $|x| = \sqrt{2}$



c) $2|x| + 1 = 7$, czyli $|x| = 3$.

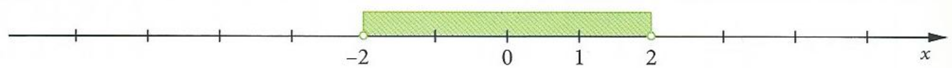


Przykład 2

Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podaną nierówność.

a) $|x| < 2$

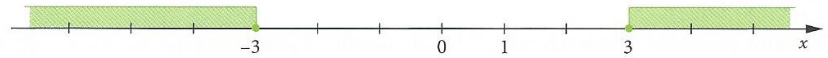
Nierówność określa wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest mniejsza od 2.



Zatem $x \in (-2; 2)$.

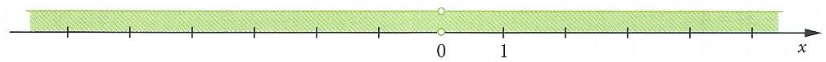
b) $|x| \geqslant 3$

Nierówność określa wszystkie punkty, których odległość od punktu 0 jest nie mniejsza niż 3.



Spełniają ją liczby z dwóch przedziałów: $x \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)$.

c) $|x| > 0$



Tylko liczba 0 nie spełnia tej nierówności, zatem $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.

d) $|x| > -2$

Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc każda liczba rzeczywista x spełnia tę nierówność: $x \in \mathbf{R}$.

e) $|x| < -1$

Wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna, więc nierówność nie ma rozwiązań.

Fakt, że odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom a i b wyraża się wzorem $|a-b|$, wykorzystamy do rozwiązywania prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną.

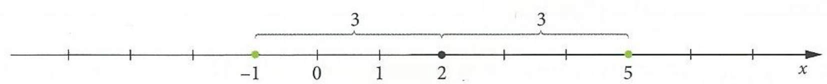
Przykład 3

Rozwiążemy graficznie podane równania.

Rozwiązanie

a) $|x-2| = 3$

Szukamy na osi punktów x, których odległość od liczby 2 jest równa 3.



Rozwiązaniami są liczby –1 oraz 5.

Sprawdźmy: $|-1-2| = |-3| = 3$, $|5-2| = |3| = 3$.

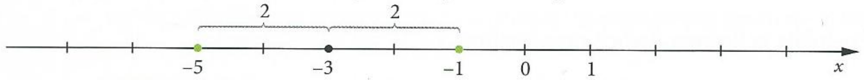
Odp.: $x = -1$ lub $x = 5$.

b) $|x+3| = 2$

Zapiszmy to równanie w takiej postaci, aby można było wykorzystać geometryczną interpretację wyrażenia $|a-b|$.

$|x-(-3)| = 2$

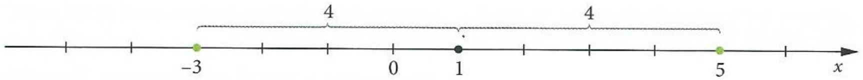
Szukamy punktów x, których odległość od punktu -3 jest równa 2.



Odp.: $x = -5$ lub $x = -1$.

c) $|1-x| = 4$

$|x-1| = 4$ ⟵ $|a-b| = |b-a|$



Odp.: $x = -3$ lub $x = 5$.

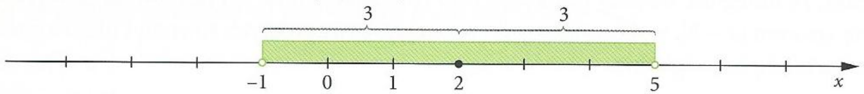
Przykład 4

Rozwiążemy graficznie podane nierówności.

Rozwiązanie

a) $|x-2| < 3$

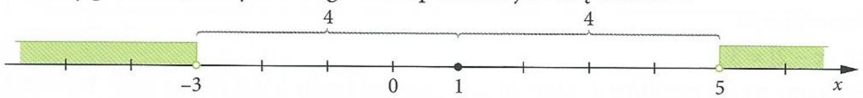
Szukamy punktów x, których odległość od punktu 2 jest mniejsza od 3. Zbiorem rozwiązań jest przedział otwarty $(-1; 5)$.



Odp.: $x \in (-1; 5)$

b) $|x-1| > 4$

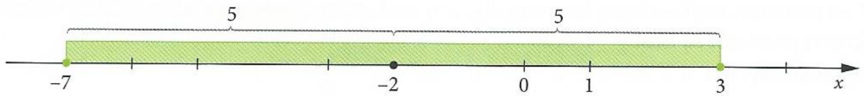
Szukamy punktów, których odległość od punktu 1 jest większa od 4.



Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$

c) $|x+2| \leqslant 5$

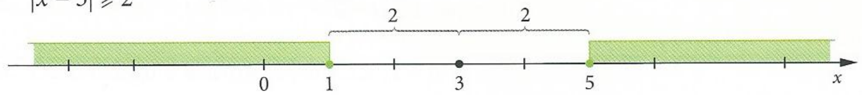
$|x-(-2)| \leqslant 5$



Odp.: $x \in \langle -7; 3 \rangle$

d) $|3-x| \geqslant 2$

$|x-3| \geqslant 2$

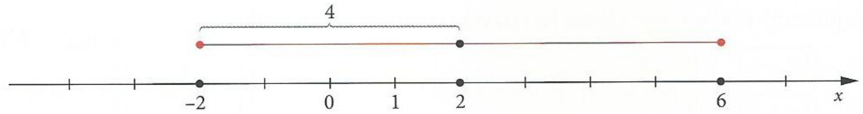


Odp.: $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 5; \infty)$

Przykład 5

Zapiszemy w postaci $|x-a| \leqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $\langle -2; 6 \rangle$.

Rozwiązanie



Odległość między końcami przedziału $\langle -2; 6 \rangle$ jest równa 8. Punktem oddalonym od -2 i od 6 o połowę tej odległości, czyli o 4, jest liczba 2. Zatem $a = 2$, $b = 4$.

Odp.: $|x-2| \leqslant 4$

Przykład 6

Zapiszemy w postaci $|x-a| > b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów $(-\infty; -4) \cup (6; \infty)$.

Rozwiązanie

Środkiem odcinka o końcach w punktach -4 oraz 6 jest punkt 1, a jego odległość od -4 oraz 6 wynosi 5. Zatem $a = 1$, $b = 5$.

Środkiem odcinka o końcach w punktach a i b jest na osi punkt $\frac{a+b}{2}$.

Odp.: $|x-1| > 5$

Korzystając z wartości bezwzględnej, możemy w innej niż poznana wcześniej postaci zapisać definicję pierwiastka kwadratowego. Przypomnijmy, że pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, która podniesiona do kwadratu jest równa a.

Na przykład $\sqrt{3^2} = 3$ oraz $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Wniosek

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ dla } a \in \mathbf{R}.$$

Zatem:

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -1+\sqrt{2} = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt{(1-\pi)^2} = |1-\pi| = \pi - 1$$

Własność tę mają wszystkie pierwiastki parzystego stopnia, czyli

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$$

dla wszystkich dodatnich liczb naturalnych n i $a \in \mathbf{R}$.

Przykład 7

Zapiszemy podane wyrażenie bez użycia symbolu pierwiastka.

a) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

b) $\sqrt{(x+5)^2} = |x+5|$

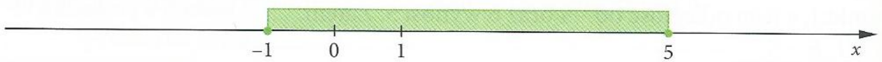
c) $\sqrt{9-6x+x^2} = \sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$ ⟵ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

d) $\sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$ ⟵ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Zauważmy, że w podanych przykładach musimy zostawić na końcu znak wartości bezwzględnej, ponieważ pierwiastek kwadratowy nie może mieć wartości ujemnej, a nie wiemy, jakie wartości przyjmuje x.

ZADANIA

3.1. Wskaż nierówność, której zbiór rozwiązań jest przedstawiony na rysunku.



A. $|x+2| \leqslant 3$ **B.** $|x+3| \leqslant 2$ **C.** $|x-2| \leqslant 3$ **D.** $|x-3| \leqslant 2$

3.2. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Równość $|x| = -x$ jest sprzeczna dla każdej liczby x, bo wartość bezwzględna nie może być ujemna. PRAWDA FAŁSZ

B. Równość $|x| = -x$ jest prawdziwa tylko dla $x = 0$. PRAWDA FAŁSZ

C. Równość $|x| = -x$ jest prawdziwa tylko dla liczb x nie większych od 0. PRAWDA FAŁSZ

3.3. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Dla każdego x wartość wyrażenia $|x-3|$ jest równa wartości wyrażenia $|x+3|$. PRAWDA FAŁSZ

B. Dla każdego x wartość wyrażenia $|x-3|$ jest równa wartości wyrażenia $x-3$. PRAWDA FAŁSZ

C. Dla każdego x wartość wyrażenia $|x-3|$ jest równa wartości wyrażenia $|3-x|$. PRAWDA FAŁSZ

3.4. Oblicz.

a) $|-3| - |-1-5| \cdot |(-3)\cdot(-2)|$

b) $\big|-2 + |2 - |3-5||\big|$

c) $\big|3 - |2-5|\big|$

d) $\big|1 - |1 - |1-4||\big|$

3.5. Oblicz.

a) $\left|3{,}5 + 2\frac{7}{8}\right| + \left|2\frac{7}{8} - 3\frac{1}{2}\right|$

b) $|8+3\sqrt{5}| - |2\sqrt{5}-8|$

c) $|2-2\sqrt{3}| \cdot |2+2\sqrt{3}|$

d) $|\sqrt{7}-2| \cdot |-\sqrt{7}-2|$

3.6. Zapisz liczbę bez znaku wartości bezwzględnej i niewymierności w mianowniku.

a) $\left|\frac{11-\sqrt{13}}{\sqrt{13}-11}\right|$

b) $\frac{|3-\sqrt{15}|}{|\sqrt{30}-3\sqrt{2}|}$

c) $\left|\frac{2-4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}\right|$

d) $\left|\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}\right|$

3.7. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podane równanie.

a) $|x| = 4$

b) $|x| = 2\frac{2}{3}$

c) $|x| - \sqrt{3} = 0$

d) $4 - |x| = 4$

e) $1 - |x| = 4$

f) $2|x| - 1 = 3$

3.8. Rozwiąż równanie.

a) $|x| = 6$

b) $12|x| = 60$

c) $3|x| - 1 = 5$

d) $2|x| + 5\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

e) $3(|x|-2) = \sqrt{2}$

f) $\sqrt{6}\left(|x|+\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{2}$

3.9. Wyznacz wszystkie wartości x, dla których podane wyrażenie jest określone, i zapisz to wyrażenie w najprostszej postaci.

a) $\frac{|x| \cdot |-x|}{-|x^2|}$

b) $\frac{|3-x|}{|2x-6|}$

c) $\frac{|\sqrt{2}-x|}{|3x-3\sqrt{2}|}$

d) $\frac{|5-2x|}{|4x-10|} - \frac{|x-6|}{|12-2x|}$

3.10. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie punkty, których współrzędne x spełniają podaną nierówność.

a) $|x| < 5$ b) $|x| \leqslant 2$ c) $-2|x| < 0$ d) $|x| - 2 \leqslant -2$

3.11. Rozwiąż równanie.

a) $|x-1| = 5$ c) $\left|5\frac{1}{3} - x\right| = 2\frac{2}{3}$ e) $|x-2| = -1$

b) $|x+2| = 3$ d) $|x+7| = 7$ f) $|11+x| = 3$

3.12. Rozwiąż nierówność.

a) $|x| - 3 < 6$ c) $9 - 2|x| \leqslant 1$ e) $3 - 2(7 - 2|x|) \leqslant -11$

b) $3|x| + 2 > 11$ d) $6 - 3|x| \leqslant 11$ f) $5 + 3|x| \leqslant 1$

3.13. Rozwiąż nierówność.

a) $|x+7| \leqslant 4$ c) $|x-5| + 1 < 5$ e) $|4-x| + 3 > 3$

b) $|x-5| > 3$ d) $1 - |x+6| \leqslant 4$ f) $3(2 - |x+9|) > 7$

3.14. Zapisz w postaci $|x-a| < b$ lub $|x-a| \leqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podany przedział liczbowy.

a) $(-3;7)$ b) $\langle 6;14\rangle$ c) $\langle -10;0\rangle$ d) $\langle -5;-1\rangle$

3.15. Zapisz w postaci $|x-a| > b$ lub $|x-a| \geqslant b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest podana suma przedziałów liczbowych.

a) $(-\infty;7) \cup (11;\infty)$ c) $(-\infty;-7\rangle \cup \langle -1;\infty)$

b) $(-\infty;-2\rangle \cup \langle 8;\infty)$ d) $(-\infty;-15) \cup (13;\infty)$

3.16. Zapisz liczbę w postaci $a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b \in \mathbf{C}$ i $c \in \mathbf{N}$.

a) $\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$ c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$ d) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$

3.17. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x.

a) $|x+2| - |x-1|$ $x \in (-\infty;-3)$ c) $|4-x| - 2|x-3| - |7-x|$ $x \in (4;7)$

b) $|5+x| + |x-8|$ $x \in (4;7)$ d) $|x-5| - 1 + |x+5|$ $x \in (1;5)$

3.18. Zapisz podane wyrażenie bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, znając warunek, jaki spełnia x.

a) $3|2x-1| - \dfrac{x-2}{|2-x|} - 2|3x+1|$ $x \in (-\infty;-1)$

b) $|x-2| - \dfrac{2x-6}{|x-3|} - |1-x|$ $x \in (5;\infty)$

c) $\dfrac{3x-9}{|x-3|} + 2\sqrt{x^2-8x+16} - 2|3-x|$ $x \in \langle -1;1\rangle$

d) $\dfrac{x^2-4}{|x|+2} + \dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{2x+6} - \left|\dfrac{1}{2} - x\right|$ $x \in \langle 1;2\rangle$

3.19. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} |x| > 2 \\ |x-2| < 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x| \leqslant 5 \\ |x+1| > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x-1| < 3 \\ |x-2| \geqslant 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} |x+1| \leqslant 3 \\ |x-1| \leqslant 3 \end{cases}$

3.20. Rozwiąż układ nierówności.

a) $\begin{cases} \sqrt{x^2} > 4 \\ |x+2| < 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{4x^2-4x+1} < 7 \\ |x-2| \geqslant 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2} \leqslant 5 \\ \sqrt{x^2} > 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x^2+10x+25} < 3 \\ |x-2| < 10 \end{cases}$

3.21. Udowodnij, że wyrażenie

$$\sqrt{25n^2+10\sqrt{3}n+3} - \sqrt{9n^2+6\sqrt{3}n+3}$$

przyjmuje wartości naturalne dla każdej naturalnej liczby n.

Prosto do matury

1. Rozwiąż równanie $|x+5| - 8 = 0$

2. Rozwiąż nierówność $10 < 2|x-2| - 4$.

3. Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań układu nierówności.

$\begin{cases} |x| > 5 \\ |x-3| < 4 \end{cases}$

4. Zapisz w postaci $|x-a| < b$ nierówność, której zbiorem rozwiązań jest przedział $(-2;14)$.

5. Udowodnij, że liczba $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ jest całkowita.

4. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Umiejętności:

- rozwiązywanie równań i nierówności liniowych z wartością bezwzględną

Podczas rozwiązywania równań lub nierówności typu $|x-b| = a$, $|x-b| < a$, $|x-b| > a$ korzystaliśmy bezpośrednio z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej. Prześledźmy na przykładach, jak można rozwiązać podobne zadanie, jeżeli wyrażenie pod symbolem wartości bezwzględnej jest bardziej skomplikowane.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $|2x-5| = 7$.

Rozwiązanie

Zadanie rozwiążemy na dwa sposoby. W pierwszym skorzystamy z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, w drugim odwołamy się bezpośrednio do jej definicji.

<u>I sposób</u>

$|2x-5| = 7$ ⟵ przekształcamy równanie do postaci $|x-b| = a$

$\left|2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right| = 7$

$2\left|x-\frac{5}{2}\right| = 7$

$\left|x-\frac{5}{2}\right| = \frac{7}{2}$

Wyznaczamy liczby, które na osi liczbowej są oddalone od $\frac{5}{2}$ o $\frac{7}{2}$.

$x = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}$ lub $x = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$

$x = -1$ lub $x = 6$

<u>II sposób</u>

Zauważmy, że $|w| = 7$ tylko wówczas, gdy $w = 7$ lub $w = -7$. Zatem

$|2x-5| = 7$ ⟵ $w = 2x-5$

$2x-5 = 7$ lub $2x-5 = -7$

$2x = 12$ lub $2x = -2$

$x = 6$ lub $x = -1$

Druga metoda rozwiązywania równania okazała się w tym wypadku prostsza.

Odp.: $x = -1$ lub $x = 6$.

Przykład 2

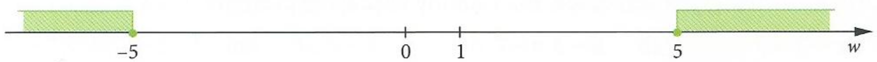
Rozwiążemy nierówność $|3-2x| \geqslant 5$.

Rozwiązanie

Tę nierówność można przekształcić do postaci $|x-b| \geqslant a$. Prostsze wydaje się jednak inne postępowanie.

Zauważmy, że $|w| \geqslant 5$ tylko wtedy, gdy zajdzie jedna z dwóch możliwości:

$w \leqslant -5$ lub $w \geqslant 5$.



Zatem:

$|3-2x| \geqslant 5$ ⟵ $w = 3-2x$

$3-2x \leqslant -5$ lub $3-2x \geqslant 5$

$-2x \leqslant -8$ lub $-2x \geqslant 2$

$x \geqslant 4$ lub $x \leqslant -1$

Rozwiązaniem nierówności $|3-2x| \geqslant 5$ jest każda liczba należąca do przedziału $(-\infty; -1\rangle$ albo do przedziału $\langle 4; \infty)$.

Odp.: $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 4; \infty)$

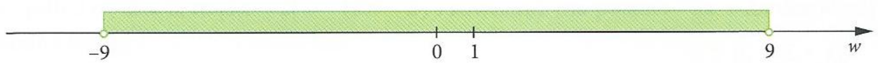
Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $|2x+3| < 9$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $|w| < 9$ tylko wtedy, gdy spełniona jest podwójna nierówność:

$-9 < w < 9$.



Zatem:

$|2x+3| < 9$ ⟵ $w = 2x+3$

$-9 < 2x+3 < 9$

$\begin{cases} 2x+3 < 9 \\ 2x+3 > -9 \end{cases}$ ⟵ nierówność podwójną zapisujemy w postaci układu nierówności

$\begin{cases} 2x < 6 \\ 2x > -12 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 3 \\ x > -6 \end{cases}$

Odp.: $x \in (-6; 3)$

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $||x-3|-2| = 5$.

Rozwiązanie

Wartość bezwzględna wyrażenia $|x-3|-2$ jest równa 5, więc:

$|x-3|-2 = 5$ lub $|x-3|-2 = -5$, czyli
$|x-3| = 7$ lub $|x-3| = -3$.

Drugie równanie jest sprzeczne, rozwiążemy więc tylko pierwsze.

$x-3 = 7$ lub $x-3 = -7$
$x = 10$ lub $x = -4$

Odp.: $x = 10$ lub $x = -4$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $||2x+4|-3| = 1$.

Rozwiązanie

$|2x+4|-3 = 1$ lub $|2x+4|-3 = -1$
$|2x+4| = 4$ lub $|2x+4| = 2$
$2x+4 = 4$ lub $2x+4 = -4$ lub $2x+4 = 2$ lub $2x+4 = -2$
$x = 0$ lub $x = -4$ lub $x = -1$ lub $x = -3$

Równanie $||2x+4|-3| = 1$ ma cztery rozwiązania.
Odp.: $x = 0$ lub $x = -4$, lub $x = -1$, lub $x = -3$.

Przykład 6

Rozwiążemy nierówność $||x+2|-3| < 7$.

Rozwiązanie

$$||x+2|-3| < 7$$
$$-7 < |x+2|-3 < 7$$
$$\begin{cases} |x+2|-3 < 7 \\ |x+2|-3 > -7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} |x+2| < 10 \\ |x+2| > -4 \end{cases}$$

Nierówność $|x+2| > -4$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x, więc do rozwiązania zostaje tylko nierówność $|x+2| < 10$.

$$-10 < x+2 < 10$$
$$-12 < x < 8$$

Odp.: $x \in (-12; 8)$

Przykład 7

Rozwiążemy nierówność $|2-|3x+6|| > 1$.

Rozwiązanie

$2-|3x+6| > 1$ lub $2-|3x+6| < -1$
$-|3x+6| > -1$ lub $-|3x+6| < -3$
$|3x+6| < 1$ lub $|3x+6| > 3$
$-1 < 3x+6 < 1$ lub $3x+6 > 3$ lub $3x+6 < -3$
$-7 < 3x < -5$ lub $3x > -3$ lub $3x < -9$
$-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$ lub $x > -1$ lub $x < -3$
$x \in \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ lub $x \in (-1; \infty)$ lub $x \in (-\infty; -3)$

Odp.: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right) \cup (-1; \infty)$

Przykład 8

Rozwiążemy równanie $|3x-2| = 5x+1$.

Dla dowolnego wyrażenia a:
- jeżeli $a \geqslant 0$, to $|a| = a$,
- jeżeli $a \leqslant 0$, to $|a| = -a$.

Rozwiązanie

<u>I sposób</u>

Zauważmy, że:

- jeśli $3x-2 \geqslant 0$, to $|3x-2| = 3x-2$ i równanie ma postać: $3x-2 = 5x+1$,
- jeśli $3x-2 < 0$, to $|3x-2| = -(3x-2)$ i równanie ma postać: $-3x+2 = 5x+1$.

Mamy zatem:

$$\begin{cases} 3x-2 \geqslant 0 \\ 3x-2 = 5x+1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ -3x+2 = 5x+1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x \geqslant 2 \\ -2x = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 3x < 2 \\ -8x = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \geqslant \frac{2}{3} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Pierwszy układ jest sprzeczny, natomiast drugi nie, bo liczba $\frac{1}{8}$ należy do przedziału $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. Jedynym rozwiązaniem równania $|3x-2| = 5x+1$ jest liczba $\frac{1}{8}$.

II sposób

$|3x - 2| = 5x + 1$

Zauważmy, że równanie może mieć rozwiązania tylko przy założeniu, że $5x + 1 \geqslant 0$, czyli $x \geqslant -\frac{1}{5}$. Wówczas mamy dwie możliwości:

$3x - 2 = 5x + 1$ lub $3x - 2 = -5x - 1$

$x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{1}{8}$

Tylko drugie rozwiązanie spełnia założenie $x \geqslant -\frac{1}{5}$.

Odp.: $x = \frac{1}{8}$

Przykład 9

Rozwiążemy nierówność $x + |2x + 4| < 3$.

Rozwiązanie

Tak jak poprzednio, sprowadzamy rozwiązanie nierówności do rozwiązania dwóch układów.

$$\begin{cases} 2x + 4 \geqslant 0 \\ x + (2x + 4) < 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x + 4 < 0 \\ x - 2x - 4 < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geqslant -4 \\ 3x < -1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2x < -4 \\ -x < 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x > -7 \end{cases}$$

Odp.: $x \in \left(-7; -\frac{1}{3}\right)$

Przykład 10

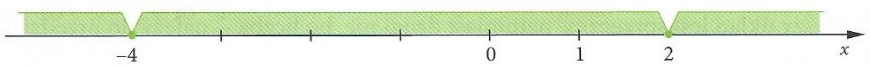
Rozwiążemy równanie $|x - 2| + |3x + 12| = 26$.

Rozwiązanie

Aby pozbyć się symboli wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$x - 2 \geqslant 0$ dla $x \geqslant 2$ oraz $3x + 12 \geqslant 0$ dla $x \geqslant -4$.

Liczby 2 oraz -4 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.



W każdym z tych przedziałów dane równanie przyjmie inną postać.

Uwaga – dzieląc oś liczbową na przedziały, należy pamiętać o krańcach tych przedziałów.

I. Dla $x \in (-\infty; -4)$ mamy:

$(-x + 2) + (-3x - 12) = 26$

$-4x = 36$

$x = -9$ ⟵ $-9 \in (-\infty; -4)$

II. Dla $x \in \langle -4; 2)$ mamy:

$(-x + 2) + (3x + 12) = 26$

$2x = 12$

$x = 6$ ⟵ $6 \notin \langle -4; 2)$

III. Dla $x \in \langle 2; \infty)$ mamy:

$(x - 2) + (3x + 12) = 26$

$4x = 16$

$x = 4$ ⟵ $4 \in \langle 2; \infty)$

Odp.: $x = -9$ lub $x = 4$.

Przykład 11

Rozwiążemy nierówność $|4x - 2| - |5 - x| > 2x$.

Rozwiązanie

Aby pozbyć się symboli wartości bezwzględnej, zauważmy, że:

$4x - 2 \geqslant 0$ dla $x \geqslant \frac{1}{2}$ oraz $5 - x \geqslant 0$ dla $x \leqslant 5$.

Liczby $\frac{1}{2}$ oraz 5 dzielą oś liczbową na trzy przedziały.

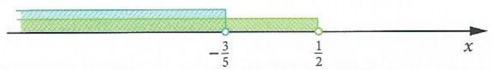
W każdym z tych przedziałów dana nierówność przyjmie inną postać.

I. Dla $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ mamy:

$(-4x + 2) - (5 - x) > 2x$

$-5x > 3$

$x < -\frac{3}{5}$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x < -\frac{3}{5}$ należą do przedziału $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$:

$$\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cap \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) = \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$$

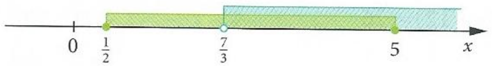
Zatem $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$.

II. Dla $x \in \left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$ mamy:

$(4x - 2) - (5 - x) > 2x$

$3x > 7$

$x > \frac{7}{3}$



Sprawdzamy, które rozwiązania nierówności $x > \frac{7}{3}$ należą do przedziału $\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle$:

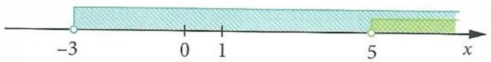
$\left\langle \frac{1}{2}; 5 \right\rangle \cap \left(\frac{7}{3}; \infty \right) = \left(\frac{7}{3}; 5 \right\rangle$

Zatem $x \in \left(\frac{7}{3}; 5 \right\rangle$.

III. Dla $x \in (5; \infty)$ mamy:

$(4x - 2) - (-5 + x) > 2x$

$x > -3$



Każda liczba z przedziału $(5; \infty)$ jest rozwiązaniem nierówności $x > -3$:

$(5; \infty) \cap (-3; \infty) = (5; \infty)$

Zatem $x \in (5; \infty)$.

Podsumowując, rozwiązaniami nierówności $|4x - 2| - |5 - x| > 2x$ są liczby należące do sumy trzech przedziałów: $\left(-\infty; -\frac{3}{5} \right)$, $\left(\frac{7}{3}; 5 \right\rangle$, $(5; \infty)$.

Odp.: $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5} \right) \cup \left(\frac{7}{3}; \infty \right)$

Przykład 12

Rozwiążemy równanie $|3x - 7| = |5 + 2x|$.

$|a| = |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$ lub $a = -b$.

Rozwiązanie

Rozwiązaniami tego równania są tylko takie wartości x, dla których wartości wyrażeń $3x - 7$ oraz $5 + 2x$ są albo liczbami równymi, albo liczbami przeciwnymi. Zatem

$3x - 7 = 5 + 2x$ lub $3x - 7 = -5 - 2x$.

Stąd

$x = 12$ lub $5x = 2$.

Odp.: $x = 12$ lub $x = \frac{2}{5}$.

ZADANIA

4.1. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Równość $|x - 7| = x - 7$ jest prawdziwa dla każdej liczby x z przedziału $(-7; \infty)$. PRAWDA FAŁSZ

B. Równość $|x - 7| = x - 7$ jest prawdziwa dla każdej liczby x z przedziału $\langle 7; \infty)$. PRAWDA FAŁSZ

C. Równość $|x - 7| = x - 7$ jest prawdziwa dla liczby x równej 7. PRAWDA FAŁSZ

4.2. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Równość $|3x - 12| = -3x + 12$ jest prawdziwa dla każdej liczby x z przedziału $(-\infty; 4)$. PRAWDA FAŁSZ

B. Równość $|3x - 12| = -3x + 12$ jest prawdziwa dla każdej liczby x z przedziału $(-\infty; 4\rangle$. PRAWDA FAŁSZ

C. Równość $|3x - 12| = 12 - 3x$ jest fałszywa dla każdej liczby rzeczywistej x. PRAWDA FAŁSZ

4.3. Dane jest równanie $|x - 6| = 2x$. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba -6. PRAWDA FAŁSZ

B. Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 2. PRAWDA FAŁSZ

C. Równanie to ma dwa rozwiązania: -6 oraz 2. PRAWDA FAŁSZ

4.4. Rozwiąż równanie.

a) $|6x - 5| = 11$

b) $|2 - 5x| = 6$

c) $|3x - 7| = 8$

d) $|2x - \sqrt{3}| = 3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5$

f) $\frac{1}{7}\sqrt{9x^2 + 12x + 4} = 2$

4.5. Rozwiąż nierówność.

a) $|3x - 5| \leqslant 2$

b) $\left|2 - \frac{1}{5}x\right| > 1$

c) $|7x - 5| < 2$

d) $|11 - 5x| \geqslant 4$

e) $9 - \sqrt{9x^2 + 36x + 36} < 0$

f) $\sqrt{1 - 14x + 49x^2} < 13$

4.6. Rozwiąż nierówność.

a) $1 - |6 - 3x| \geqslant 1$

b) $|x - \sqrt{5} + 1| > 0$

c) $5 + \left|3\frac{1}{5}x - 7\right| < 1$

d) $9 > 6 - |2x - 8|$

4.7. Rozwiąż równanie.

a) $\left||x+3|+5\right|=7$
b) $\left||x+3|-\sqrt{7}\right|=\pi$
c) $\left||x+5|-2\right|=1$
d) $\left|3\sqrt{2}-|\sqrt{2}x-1|\right|=2\sqrt{3}$
e) $\left|9-\sqrt{49-14x+x^2}\right|=6$
f) $\left|4-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x+1}\right|=7$

D **4.8.** Wykaż, że równanie $\left|\left||x+3|-5\right|-2\right|+1=0$ nie ma rozwiązań.

4.9. Rozwiąż nierówność.

a) $\left||x-7|+1\right|<6$
b) $\left|2\cdot|3-x|-6\right|\leqslant 2$
c) $\left|7-\left|\frac{1}{2}x-2\right|\right|>3$
d) $\left||5x+2|-3\right|\geqslant 4$
e) $\left|\sqrt{0{,}16x^2-4x+25}-2\right|<3$
f) $7-\left|3-2\cdot|11-3x|\right|<2$

4.10. Wśród podanych nierówności wskaż taką, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej, oraz taką, która nie ma rozwiązań.

A. $\left||x-5|+2\right|+3\geqslant 0$
B. $\left||5x-1|-3\right|-2\geqslant 0$
C. $\left||2x+3|-5\right|+1<0$
D. $\left||3x+2|+1\right|-5<0$

4.11. Rozwiąż równanie.

a) $|3x-1|-4x=2$
b) $|5x+2|=2x-1$
c) $4x-|7-2x|=9$
d) $|x+2|=\frac{1}{3}x+2$
e) $|x+5|-2=2x$
f) $3|x-2|-4x=6$

4.12. Rozwiąż nierówność.

a) $2|x+1|-3\leqslant 2x-1$
b) $\frac{1}{2}|2x-5|+1>3x$
c) $|x+3|\geqslant\frac{1}{5}x+3$
d) $2|3-x|+3x-7<1$
e) $5-|2x-7|\geqslant\frac{1}{2}x-3$
f) $|x+2|-x>2-\frac{2}{3}x$

4.13. Rozwiąż równanie.

a) $|x-3|+|x+2|=7$
b) $|x-1|-|x+5|=6$
c) $|3-x|+|4-2x|=4$
d) $|2x-16|-|x-3|=3$

4.14. Rozwiąż równanie.

a) $3|x-1|+2|x+2|=9+3x$
b) $\sqrt{4x^2+20x+25}-3\sqrt{1-2x+x^2}=2$
c) $|2x-3|-|3x-2|=5-x$
d) $2|x+4|+12=|2x-4|$

4.15. Rozwiąż nierówność.

a) $|x-2|+|2x-7|<9$
b) $|3x-8|\leqslant|x+6|$
c) $|x+3|-|x+1|>2(x+1)$
d) $|x+2|+|x-3|\geqslant x+3$

4.16. Rozwiąż nierówność.

a) $|x+1|+3|x-1|\geqslant 4x-5$
b) $|x+3|+\frac{1}{2}(4-x)\geqslant|2x-1|$
c) $|3-3x|-|2-x|<2x-6$
d) $|x-2|-3\sqrt{4x^2-28x+49}\geqslant 1-x$

4.17. Rozwiąż równanie.

a) $|x-2|+|4-2x|-|3x-6|+|10-5x|=8$
b) $|3x-1|+|2-6x|+x=5$
c) $|x+3|+2|4-x|-|3x+9|+|3x-12|=15$
d) $|2x+2|-|x-1|-|x+1|=2-|2-2x|$

4.18. Rozwiąż nierówność.

a) $|x+0{,}5|-|-2x-1|+4|2x+1|+|2+4x|\leqslant 3$
b) $|x-3|+|2x+6|\geqslant 2+|x+3|$
c) $8-2x+|x+1|-|-2x-2|-|3x+3|\leqslant 0$
d) $|x+\sqrt{3}|+|2\sqrt{3}-2x|\leqslant 3+|x-\sqrt{3}|$

4.19. Rozwiąż równanie.

a) $|x+1|=3|x-1|$
b) $|\sqrt{3}+2x|=|1-\sqrt{3}x|$
c) $|3x-\pi+1|=|\sqrt{3}-2x|$
d) $\sqrt{2x^2-2\sqrt{6}x+3}=\sqrt{3x^2+2\sqrt{6}x+2}$

Prosto do matury

1. Rozwiąż równanie $\left|1-|x+5|\right|=3$.

2. Rozwiąż nierówność $\left|1-|1-x|\right|<1$.

3. Rozwiąż równanie $|2x-8|=|3-x|$.

4. Rozwiąż nierówność $|x|+6\sqrt{4x^2-4x+1}\geqslant x$.

5. Rozwiąż równanie $|x-1|+|2x+3|+|4-x|+|x|=0$.