6. Działania na wektorach

Umiejętności:

- dodawanie i odejmowanie wektorów oraz mnożenie wektora przez liczbę
- interpretacja geometryczna działań na wektorach

Zdefiniujemy teraz wektory i działania na nich, omówimy własności tych działań oraz pokażemy przykłady zastosowania wektorów w zadaniach geometrycznych.

Przykład 1

Marta wybrała się w podróż z Gdańska do Krakowa. Spójrzmy na mapę Polski. Ilustracją początku i końca tej podróży jest narysowana na mapie strzałka. Natomiast z rysunku nie można odczytać rzeczywistej drogi, którą przebyła Marta.

Definicja

Niech A i B będą dwoma punktami na płaszczyźnie. Uporządkowaną parę punktów (A, B) nazywamy **wektorem o początku A i końcu B** i oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Jeśli $A = B$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektorem zerowym.

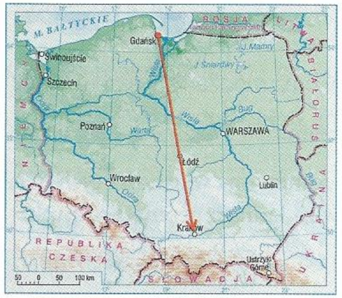
Niezerowy wektor $\overrightarrow{AB}$ jednoznacznie wyznacza:

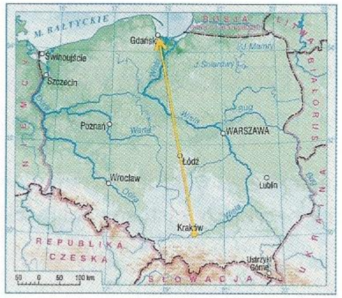
- prostą AB,
- półprostą AB,
- odcinek AB.

Definicja

- Dwa niezerowe wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są **równoległe** ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$) (lub: mają **ten sam kierunek**), jeżeli proste AB i CD są równoległe.
- **Długością** wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy $|\overrightarrow{AB}|$ albo $|AB|$.
- **Wektorem przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{BA}$.

Na dwóch oddzielnych rysunkach zaznaczyliśmy wektory przeciwne.

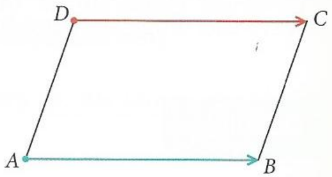




Wektory przeciwne mają ten sam kierunek i równe długości.

Zgodnie z definicją każdy wektor ma swój początek i koniec. O wektorze $\overrightarrow{AB}$ często mówimy, że jest **wektorem zaczepionym** lub **związanym**. Rozszerzymy teraz pojęcie równości wektorów, aby wprowadzić pojęcie wektora swobodnego.

Przyjrzyjmy się wektorom wyznaczonym przez przeciwległe boki równoległoboku $ABCD$. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, zaczepione w różnych punktach, nazwiemy wektorami równymi.

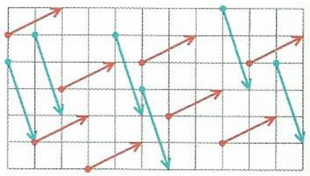


Definicja

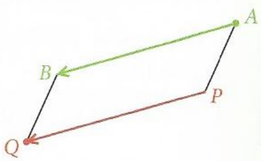
Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ nazywamy **równymi** ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$), jeżeli środek odcinka AC jest równocześnie środkiem odcinka BD.

Przykład 2

Wszystkie wektory zaznaczone na rysunku kolorem czerwonym są równe, podobnie jak wszystkie wektory zaznaczone na rysunku kolorem niebieskim.



W dowolnym punkcie P płaszczyzny można zaczepić wektor $\overrightarrow{PQ}$ równy danemu wektorowi $\overrightarrow{AB}$.



Definicja

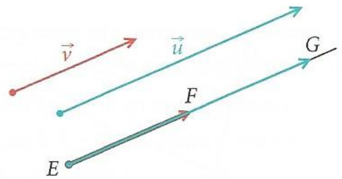
Wektorem swobodnym wyznaczonym przez wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych równych wektorowi $\overrightarrow{AB}$.

Do oznaczania wektorów swobodnych często używamy pojedynczych liter, np.: $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$. Wektor swobodny zerowy oznaczamy symbolem $\vec{0}$.

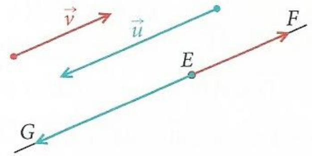
Zapis $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$ oznacza, że wektor $\overrightarrow{MP}$ zaczepiony w punkcie M należy do wektora swobodnego $\vec{v}$. W takim wypadku mówimy również, że wektor $\vec{v}$ został zaczepiony w punkcie M lub że wektor $\overrightarrow{MP}$ reprezentuje wektor $\vec{v}$. W dalszych rozważaniach będziemy używać uproszczonych określeń, na przykład „niezerowy wektor $\vec{w}$" oznacza, że niezerowy jest każdy wektor zaczepiony reprezentujący wektor $\vec{w}$.

Definicja

Dwa niezerowe i równoległe wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **ten sam zwrot** (lub: **zwroty zgodne**), jeśli po zaczepieniu obu wektorów w jednym punkcie półproste wyznaczone przez te wektory się pokrywają. Jeśli zaś te półproste tworzą w sumie prostą, to wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ mają **zwroty przeciwne**.



wektory o zgodnych zwrotach



wektory o przeciwnych zwrotach

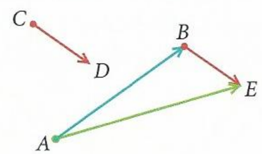
Kierunek, długość i zwrot wektora swobodnego jednoznacznie go określają. Zdefiniujemy teraz dodawanie wektorów swobodnych.

Definicja

Jeżeli $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są dowolnymi wektorami swobodnymi, to

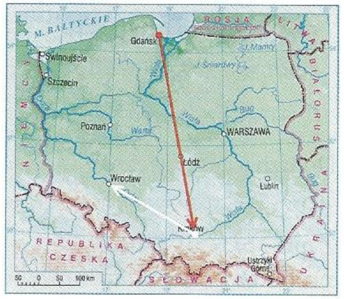
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE},$$

gdzie E jest takim punktem, że $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



Przykład 3

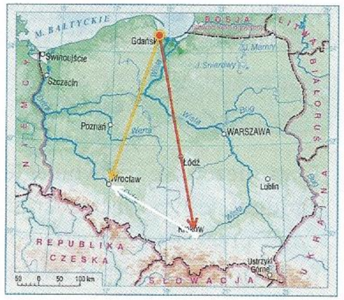
Na mapie punkt G oznacza Gdańsk, punkt K – Kraków, W – Wrocław. Ilustracją pierwszego etapu podróży Marty jest wektor $\overrightarrow{GK}$. Z Krakowa Marta pojechała do Wrocławia i tam swoją podróż zakończyła. Ilustracją drugiego etapu podróży jest wektor $\overrightarrow{KW}$.



Wektor $\overrightarrow{GW}$ będący sumą wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$, mówiąc poglądowo, podsumowuje całą podróż, której punktem startowym był Gdańsk, a końcowym Wrocław.

$$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KW} = \overrightarrow{GW}$$

Zauważmy, że długość wektora $\overrightarrow{GW}$ nie jest równa sumie długości wektorów $\overrightarrow{GK}$ oraz $\overrightarrow{KW}$.



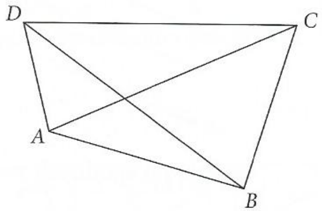
Przykład 4

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

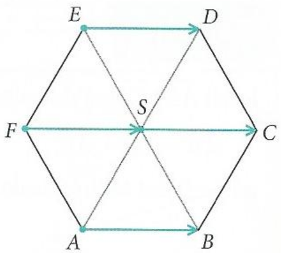
$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

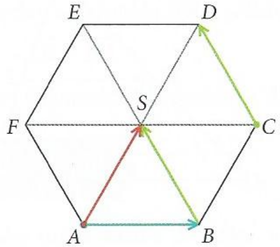


Przykład 5

W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$ są równe. Wynika to bezpośrednio z własności sześciokąta foremnego.
Wykonamy podane działania na wektorach.

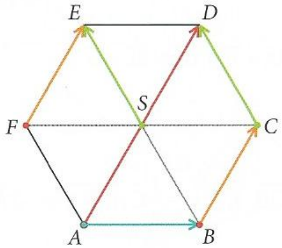


Rozwiązanie



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ ⟵ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BS}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{SE} =$ ⟵ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Zauważmy, że jeżeli $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}$, to odcinki AB i SC są równej długości i równoległe, oraz odcinki AS i BC są równej długości i równoległe.

Definicja

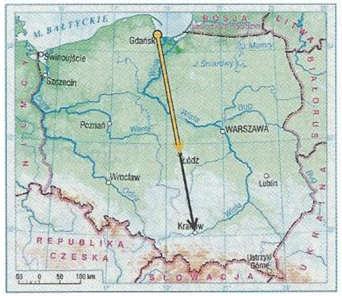
Iloczynem niezerowego wektora $\vec{v}$ i liczby $k \neq 0$, co zapisujemy $k \cdot \vec{v}$, nazywamy równoległy do wektora $\vec{v}$ wektor $\vec{w}$ taki, że $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{v}|$ oraz:

- jeżeli $k > 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są zgodne,
- jeżeli $k < 0$, to zwroty wektorów $\vec{w}$ oraz $\vec{v}$ są przeciwne.

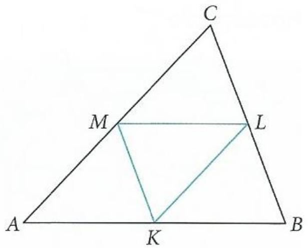
Jeżeli $\vec{v}$ jest wektorem zerowym lub $k = 0$, to $k \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Przykład 6

Droga z Gdańska do Krakowa (w linii prostej) wiedzie przez Łódź. Przyjmijmy, że odległość z Gdańska do Łodzi stanowi $\frac{5}{8}$ odległości z Gdańska do Krakowa. Używając wektorów i oznaczając Gdańsk, Kraków oraz Łódź odpowiednio punktami G, K i $Ł$, możemy zapisać, że $\overrightarrow{GŁ} = \frac{5}{8}\overrightarrow{GK}$.



Przykład 7



W trójkącie ABC punkty K, L, M są środkami boków, jak na rysunku.

Udowodnimy, że $\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Dowód

$$\begin{cases} \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} \\ \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} \end{cases}$$

$$2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$$

$$2\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AB} \quad \longleftarrow \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \text{ i } \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{BL} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Koniec dowodu

Podobnie można wykazać inne równości, np.: $2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{ML}$.

Twierdzenie

Własności działań na wektorach

Jeżeli $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ są wektorami oraz k, p liczbami rzeczywistymi, to:

- $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$,
- $\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$,
- $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$,
- $(k + p)\vec{u} = k\vec{u} + p\vec{u}$.

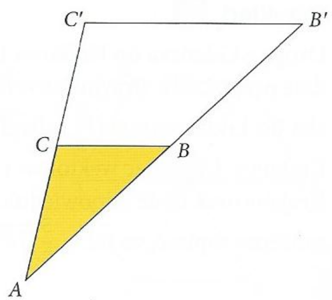
Dowód tego twierdzenia pominiemy.

Zilustrujemy własność $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$, czyli rozdzielność mnożenia przez liczbę względem dodawania wektorów, dla $k = 2$.

Zakładamy, że $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ oraz $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$.
Zatem $2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ (zobacz przykład 7.)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} =$$
$$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}.$$



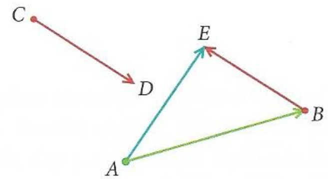
Mnożąc wektor przez -1, otrzymamy wektor przeciwny.
Między wektorem $\overrightarrow{AB}$ a wektorem do niego przeciwnym zachodzi związek

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Z tej własności korzystamy, definiując odejmowanie wektorów.

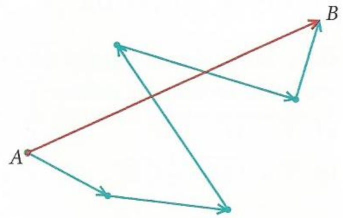
Definicja

Aby **od wektora $\vec{v}$ odjąć wektor $\vec{w}$**, do wektora $\vec{v}$ dodajemy wektor przeciwny do $\vec{w}$.



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \quad \longleftarrow \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

Zauważmy, że każdy wektor można przedstawić w postaci sumy innych wektorów na nieskończenie wiele sposobów. O takiej operacji mówimy, że **rozkładamy wektor na składowe**.
Na przykład na rysunku obok wektor $\overrightarrow{AB}$ został rozłożony na pięć składowych.



ZADANIA

6.1. Punkt M jest środkiem odcinka KL. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz prawidłową odpowiedź.

A. $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LM}$	PRAWDA	FAŁSZ
B. $\overrightarrow{KM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{LK}$	PRAWDA	FAŁSZ
C. $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{LM}$	PRAWDA	FAŁSZ

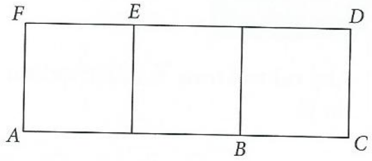
6.2. Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	PRAWDA	FAŁSZ
B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$	PRAWDA	FAŁSZ
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$	PRAWDA	FAŁSZ

6.3. Punkt S jest środkiem symetrii prostokąta $ABCD$. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BS}$	PRAWDA	FAŁSZ
B. $\lvert\overrightarrow{AS}\rvert = \lvert\overrightarrow{BS}\rvert$	PRAWDA	FAŁSZ
C. $\lvert\overrightarrow{AS}\rvert + \lvert\overrightarrow{SB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	PRAWDA	FAŁSZ

6.4. Trzy kwadraty, z których zbudowany jest prostokąt $ACDF$, są przystające. Korzystając z oznaczeń, wskaż wszystkie pary wektorów



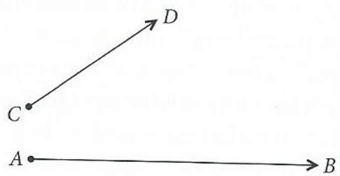
a) równych.
b) przeciwnych.
c) o zgodnych zwrotach i różnych długościach.
d) tej samej długości, ale o różnych kierunkach.

6.5. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami prostokąta. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

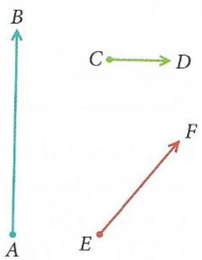
6.6. Mając dane wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$, jak na rysunku, skonstruuj wektor $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
b) $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CD}$
d) $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{AB}$



6.7. Mając dane wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$, jak na rysunku, skonstruuj wektor $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF}$
b) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$
d) $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}) - 2\overrightarrow{DC}$



6.8. Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{AC}$ w zależności od wektora $\overrightarrow{AB}$.

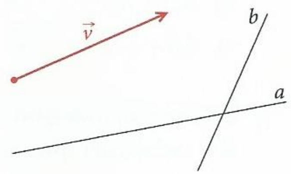
6.9. Dany jest trójkąt ABC. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków AB, BC oraz AC. Wykaż, że $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.

6.10. W równoległoboku $ABCD$ punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i BC. Wyznacz wektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DK}$ i $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{DL}$.

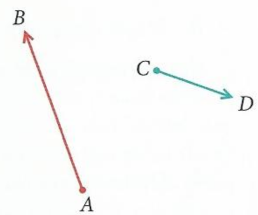
6.11. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$. Przedstaw wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FC}$ oraz $\overrightarrow{EC}$ w postaci $m \cdot \overrightarrow{AD} + p \cdot \overrightarrow{BE}$, gdzie m, p są odpowiednio dobranymi liczbami.

6.12. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty K i L spełniają warunki: $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DB}$ i $\overrightarrow{AL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$. Wyznacz wektor $\overrightarrow{KL}$ za pomocą wektorów $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{DC}$.

6.13. Rozłóż wektor $\overrightarrow{v}$ na dwie składowe tak, aby jedna z nich była równoległa do prostej a, a druga – do prostej b. Wykonaj odpowiedni rysunek.



6.14. Rozłóż wektor $\overrightarrow{AB}$ (rys.) na pięć składowych w taki sposób, aby jedną z nich był wektor $\overrightarrow{CD}$. Wykonaj odpowiedni rysunek.



6.15. Wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ mają różne kierunki. Dla jakich wartości parametrów m i k prawdziwa jest równość $(m-3)\overrightarrow{u} + (k+5)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$?

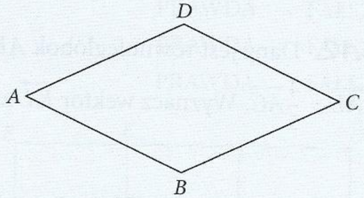
Prosto do matury

1. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami rombu, jak na rysunku. Wyznacz sumy i różnice wektorów.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

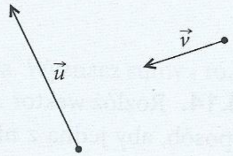
b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



2. Dane są dwa nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$. Skonstruuj trzeci wektor $\vec{v}$ tak, aby zachodziła równość: $\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}=\vec{0}$.

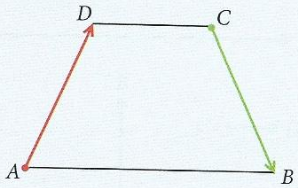
3. Mając dane wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ położone jak na rysunku, skonstruuj wektor $\vec{w}=2\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}$.



4. Dane są trzy wektory o tym samym kierunku $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, przy czym $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$, wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają zwroty zgodne, zaś wektory $\vec{a}$ i $\vec{c}$ zwroty przeciwne. Wyraź wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za pomocą wektora $\vec{a}$.

5. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel DC$ jak na rysunku, kąt DAB jest równy $60°$ oraz $|AD|=|DC|$. Wyznacz współczynniki k i m, dla których prawdziwa jest równość

$$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AD}+m\cdot\overrightarrow{CB}.$$



7. Wektory w układzie współrzędnych

Umiejętności:

- obliczanie współrzędnych oraz długości wektora
- dodawanie i odejmowanie wektorów
- mnożenie wektorów przez liczby

Wygodnym narzędziem do opisywania wektorów na płaszczyźnie jest układ współrzędnych. Zaczniemy od opisu wektora na osi liczbowej.

Wektory na osi liczbowej

Wektor swobodny wyznaczony przez wektor zaczepiony o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie 1 nazywamy **wektorem jednostkowym**. Oznaczymy ten wektor $\vec{i}$.

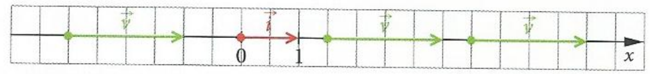
Ograniczyliśmy nasze rozważania do jednej prostej, zatem, mówiąc obrazowo, wektor jednostkowy może się dowolnie przesuwać tylko po tej prostej.

Przykład 1

Narysujemy na osi kilka wektorów postaci $k\cdot\vec{i}$, $(k\neq 0)$.

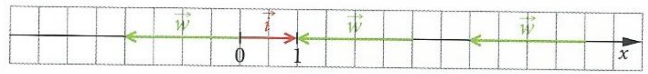
a) $k=2$

$\vec{v}=2\cdot\vec{i}$



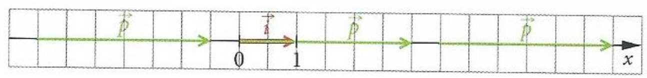
b) $k=-2$

$\vec{w}=-2\cdot\vec{i}$



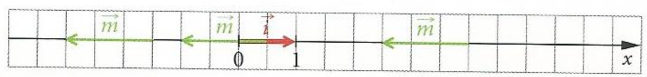
c) $k=3$

$\vec{p}=3\cdot\vec{i}$



d) $k=-\frac{3}{2}$

$\vec{m}=-\frac{3}{2}\cdot\vec{i}$



Zgodnie z definicją mnożenia wektora przez liczbę każdy wektor równy wektorowi $k\cdot\vec{i}$, $(k\neq 0)$ ma ten sam kierunek, długość równą $|k|$ oraz dla $k<0$ zwrot przeciwny, a dla $k>0$ zwrot zgodny ze zwrotem wektora jednostkowego osi. Wektor $0\cdot\vec{i}$ jest wektorem zerowym.

Definicja

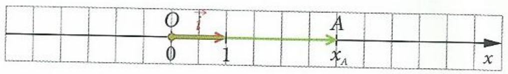
Liczbę k nazywamy **współrzędną wektora** $\vec{w} = k \cdot \vec{i}$ na osi. Zapis $\vec{w} = [k]$ odczytujemy: wektor $\vec{w}$ ma na osi współrzędną k.

Zatem dla wektorów z przykładu 1. mamy: $\vec{v} = [2]$, $\vec{w} = [-2]$, $\vec{p} = [3]$, $\vec{m} = \left[-\frac{3}{2}\right]$.

Wniosek

Dwa wektory na osi liczbowej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Oznaczmy początek osi liczbowej literą O.
Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada dokładnie jedna współrzędna. Zauważmy, że współrzędna dowolnego punktu A na osi jest równa współrzędnej wektora $\overrightarrow{OA}$.
Jeżeli punkt $A = (x_A)$, to $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}$, czyli $\overrightarrow{OA} = [x_A]$.



Mając dane współrzędne punktów A i B, można wyznaczyć współrzędną wektora $\overrightarrow{AB}$.
Niech $A = (x_A)$, $B = (x_B)$. Wówczas $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = x_B \cdot \vec{i}$ oraz $\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{i}$.

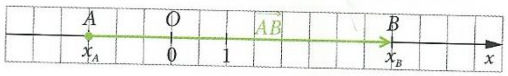
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ⟵ definicja dodawania wektorów

$x_A \cdot \vec{i} + k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i}$

$k \cdot \vec{i} = x_B \cdot \vec{i} - x_A \cdot \vec{i}$

$k \cdot \vec{i} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i}$

$k = x_B - x_A$



Wniosek

Jeżeli $A = (x_A)$ oraz $B = (x_B)$, to $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A]$.

Powiemy: aby obliczyć współrzędną wektora na osi, od współrzędnej końca tego wektora odejmujemy współrzędną jego początku.

Przykład 2

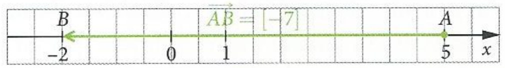
Wyznaczymy współrzędną i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

Rozwiązanie

a) $A = (5)$, $B = (-2)$

$\overrightarrow{AB} = [-2 - 5] = [-7]$

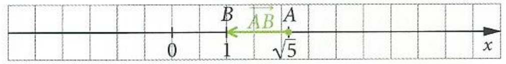
$|\overrightarrow{AB}| = 7$



b) $A = (\sqrt{5})$, $B = (1)$

$\overrightarrow{AB} = [1 - \sqrt{5}]$

$|\overrightarrow{AB}| = |1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$



Twierdzenie

Jeżeli $\vec{v} = [a]$, $\vec{p} = [b]$ i $k \in \mathbf{R}$, to:
- wektor $\vec{w} = \vec{v} + \vec{p}$ ma współrzędną równą sumie współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a + b]$,
- wektor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{p}$ ma współrzędną równą różnicy współrzędnych, czyli $\vec{w} = [a - b]$,
- wektor $\vec{w} = k \cdot \vec{v}$ ma współrzędną równą iloczynowi liczby k i współrzędnej wektora $\vec{v}$, czyli $\vec{w} = [ka]$.

Dowód tego twierdzenia zostawiamy jako ćwiczenie do samodzielnego wykonania.

Przykład 3

Dane są punkty $A = (3)$, $B = (-7)$, $C = (5)$. Wyznaczymy taki punkt $D = (x)$, aby zachodziła podana równość.

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} = [x - 3]$, $\overrightarrow{BC} = [12]$

$[x - 3] = 3 \cdot [12]$

$x - 3 = 36$

$x = 39$

Odp.: $D = (39)$

b) $-2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BD} = [x + 7]$, $\overrightarrow{AC} = [2]$

$-2 \cdot [x - 3] + [x + 7] = 5 \cdot [2]$

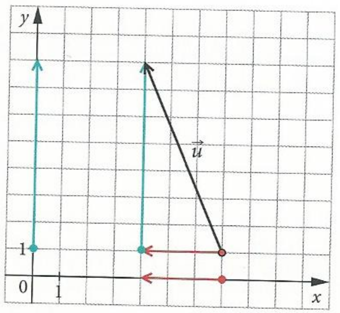
$-2x + 6 + x + 7 = 10$

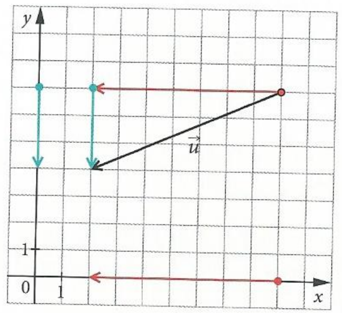
$x = 3$

Odp.: $D = (3)$

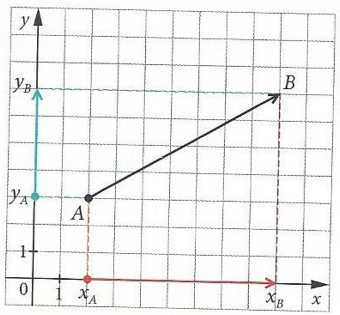
Wektory w układzie współrzędnych

Jeżeli na płaszczyźnie dane są dwie przecinające się proste, to rozkład niezerowego wektora na dwie składowe równoległe odpowiednio do tych prostych jest jednoznaczny. Wprowadzimy na płaszczyźnie układ współrzędnych i skorzystamy z tej własności. Przyjrzyjmy się przykładom rozkładu niezerowego wektora $\vec{u}$ na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych. Aby zwiększyć czytelność rysunku, wektor $\vec{u}$ został umieszczony w pierwszej ćwiartce układu.





Na rysunkach czerwonym kolorem zaznaczone są składowe równoległe do osi x, niebieskim – składowe równoległe do osi y. Każda z nich ma na odpowiedniej osi swoją współrzędną. Jeżeli wektor $\vec{u}$ jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, to jego składowa równoległa do drugiej osi jest wektorem zerowym.



← na osi x współrzędną składowej jest liczba $x_B - x_A$

← na osi y współrzędną składowej jest liczba $y_B - y_A$

Definicja

Współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A = (x_A, y_A)$ i o końcu w punkcie $B = (x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę liczb $[x_B - x_A, y_B - y_A]$.

Wektor zerowy ma obydwie współrzędne równe 0 i oznaczamy go $\vec{0} = [0, 0]$.
Jeżeli np. $A = (-7, 2)$, $B = (-4, \sqrt{2})$, to $\overrightarrow{AB} = [3, \sqrt{2} - 2]$, $\overrightarrow{BA} = [-3, 2 - \sqrt{2}]$.

Przykład 4

Wektor $\overrightarrow{AB} = [-3, 5]$ jest zaczepiony w punkcie $A = (0, -2)$. Wyznaczymy współrzędne końca wektora, czyli punktu B.

Rozwiązanie

Jeżeli oznaczymy $B = (x_B, y_B)$, to prawdziwe są dwie równości:

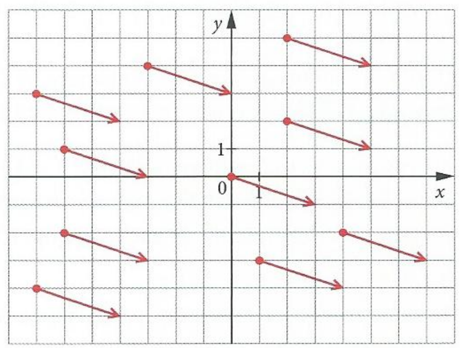
$$\begin{cases} x_B - x_A = -3 \\ y_B - y_A = 5 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x_B = -3 \\ y_B + 2 = 5 \end{cases}$$

Odp.: $B = (-3, 3)$.

Przypomnijmy – płaszczyznę, na której wprowadzony został prostokątny układ współrzędnych, nazywamy **płaszczyzną kartezjańską**. Na płaszczyźnie kartezjańskiej każdemu punktowi przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego punktu. Podobnie – każdemu wektorowi swobodnemu przyporządkowana jest dokładnie jedna uporządkowana para liczb, nazywanych współrzędnymi tego wektora.

Przykład 5

Na rysunku prezentujemy kilka wektorów, które mają współrzędne $[3, -1]$. Wszystkie te wektory mają ten sam kierunek (są równoległe), zgodne zwroty i równe długości, czyli są równe.



Wniosek

Dwa wektory na płaszczyźnie kartezjańskiej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe współrzędne.

Wykorzystanie rozkładu wektora na dwie składowe równoległe do osi układu współrzędnych, przedstawienie wektora w postaci współrzędnych oraz zastosowanie twierdzenia o działaniach na wektorach na osi (zob. s. 59) prowadzi do następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Dane są wektory $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$. Wówczas:

- $\vec{u} + \vec{v} = [a + c,\ b + d]$,
- $\vec{u} - \vec{v} = [a - c,\ b - d]$,
- $k \cdot \vec{u} = [k \cdot a,\ k \cdot b],\ k \in \mathbf{R}$.

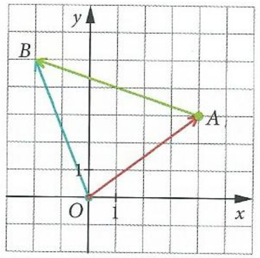
Przykład 6

Dane są punkty $O = (0, 0)$, $A = (4, 3)$, $B = (-2, 5)$. Zatem:

$\overrightarrow{OA} = [4 - 0,\ 3 - 0] = [4, 3]$,

$\overrightarrow{AB} = [-2 - 4,\ 5 - 3] = [-6, 2]$,

$\overrightarrow{OB} = [-2 - 0,\ 5 - 0] = [-2, 5]$.



Wektor $\overrightarrow{OB}$ jest sumą wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{AB}$. Można to zapisać następująco:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = [4, 3] + [-6, 2] = [-2, 5] = \overrightarrow{OB}$.

Przykład 7

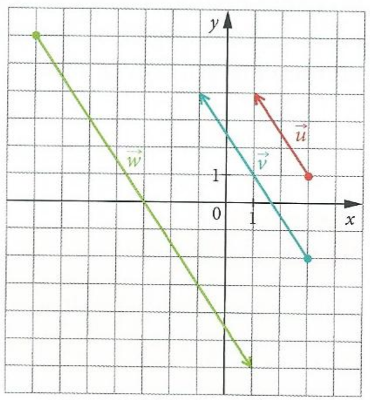
Na rysunku zaznaczyliśmy wektory $\vec{v} = [-4, 6]$, $\vec{u} = [-2, 3]$, $\vec{w} = [8, -12]$.
Z rysunku odczytujemy, że zachodzą np. równości $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ oraz $\vec{w} = -2\vec{v}$.
Te same równości uzyskamy, porównując współrzędne wektorów:

$$\vec{u} = [-2, 3] = \frac{1}{2}[-4, 6] = \frac{1}{2}\vec{v},$$

$$\vec{w} = [8, -12] = -2[-4, 6] = -2\vec{v}.$$

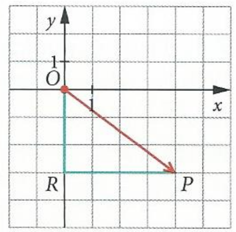
Jeżeli $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$, to $\vec{v} = 2\vec{u}$. Zatem

$$\vec{w} = -2\vec{v} = -2 \cdot 2\vec{u} = -4\vec{u}.$$



Przykład 8

Obliczymy długość wektora $\vec{u} = [4, -3]$.



Rozwiązanie

Jeżeli zaczepimy wektor $\vec{u} = [4, -3]$ w punkcie $O = (0, 0)$, to jego końcem będzie punkt $P = (4, -3)$.

Rozważmy trójkąt prostokątny OPR. Przyprostokątne tego trójkąta mają długości $|OR| = |-3| = 3$ i $|RP| = 4$.
Zatem na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$|OP|^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ czyli } |\overrightarrow{OP}| = 5.$$

Odp.: $|\vec{u}| = 5$

Twierdzenie

Jeżeli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to **długość wektora** $\overrightarrow{AB}$ jest równa

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Dowód twierdzenia zostawiamy do samodzielnego wykonania.

Przykład 9

Punkty $A = (1, 3)$, $B = (-1, -2)$, $D = (4, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznaczymy współrzędne punktu C oraz długości przekątnych tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Punkt $C = (x, y)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$ tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} = [-2, -5]$, $\quad \overrightarrow{DC} = [x - 4,\ y - 4]$

$$\begin{cases} x - 4 = -2 \\ y - 4 = -5 \end{cases}$$

Zatem $C = (2, -1)$.
Długości przekątnych równoległoboku $ABCD$ są długościami wektorów $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{AC} = [1, -4]$, stąd $|AC| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{BD} = [5, 6]$, stąd $|BD| = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$

Odp.: $C = (2, -1)$, $|AC| = \sqrt{17}$, $|BD| = \sqrt{61}$

ZADANIA

7.1. Dane są punkty $A=(-5,1)$ i $B=(3,-2)$. Czy podane zdania są prawdziwe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\overrightarrow{AB}=[8,-3]$	TAK	NIE
B. $\overrightarrow{AB}=[-8,3]$	TAK	NIE
C. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{73}$	TAK	NIE

7.2. Dane są wektory: $\vec{a}=[3,-1]$, $\vec{b}=[-3,5]$. Czy podane zdania są prawdziwe? Wybierz właściwą odpowiedź.

A. $\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert=\sqrt{10}+\sqrt{34}$	TAK	NIE
B. $\lvert\vec{a}\rvert+\lvert\vec{b}\rvert=4$	TAK	NIE
C. $\lvert\vec{b}\rvert-\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{24}$	TAK	NIE

7.3. Dane są punkty A i B. Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $A=(1,3)$, $B=(4,5)$
b) $A=(-5,-2)$, $B=(-1,-1)$
c) $A=(-1,5)$, $B=(-3,5)$
d) $A=(6,-3)$, $B=(6,1)$

7.4. Znając współrzędne punktu M oraz współrzędne wektora $\overrightarrow{MP}$, wyznacz współrzędne punktu P.

a) $M=(6,3)$, $\overrightarrow{MP}=[-3,-2]$
b) $M=(-2,-3)$, $\overrightarrow{MP}=[4,2]$
c) $M=(2,1)$, $\overrightarrow{MP}=[-4,-3]$
d) $M=(1,2)$, $\overrightarrow{MP}=\left[-\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right]$

7.5. Znając współrzędne wektora $\overrightarrow{KL}$ oraz współrzędne punktu L, wyznacz współrzędne punktu K.

a) $\overrightarrow{KL}=[3,5]$, $L=(5,1)$
b) $\overrightarrow{KL}=[5,0]$, $L=(7,2)$
c) $\overrightarrow{KL}=[-2,3]$, $L=(1,1)$
d) $\overrightarrow{KL}=[0,3]$, $L=(5,-2)$

7.6. Podaj współrzędne wektora

a) równoległego do osi x o zwrocie zgodnym z osią x, którego długość jest równa 5.
b) równoległego do osi y o zwrocie zgodnym z osią y, którego długość jest równa 1.
c) równoległego do osi x o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi x, którego długość jest równa 3.
d) równoległego do osi y o zwrocie przeciwnym do zwrotu osi y, którego długość jest równa $2\frac{1}{2}$.

7.7. Dane są punkty $A=(-3,2)$, $B=(1,4)$, $C=(-1,-1)$. Wyznacz współrzędne podanego wektora.

a) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$
b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
c) $\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$
d) $2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC})$

7.8. Dane są punkty $A=(-4,-2)$, $B=(-2,-2)$, $C=(2,2)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu D, aby spełniona była podana równość.

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$
b) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$
c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
d) $2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

7.9. Dany jest wektor $\vec{a}=[-3,2]$. Wyznacz (o ile istnieje) taką liczbę k, aby zachodziła równość $\vec{b}=k\vec{a}$.

a) $\vec{b}=[-9,6]$
b) $\vec{b}=\left[\frac{3}{2},-1\right]$
c) $\vec{b}=[3,2]$
d) $\vec{b}=\left[-\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

7.10. Dane są wektory $\vec{a}=[1,-2]$ i $\vec{b}=[-3,5]$. Wyznacz taki wektor $\vec{c}$, aby zachodziła podana równość.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
b) $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$
c) $-5\vec{a}+3\vec{b}=2\vec{c}$
d) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}=-2\vec{b}$

7.11. Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $A=(2,-5)$, $B=(-2,-2)$
b) $A=(3,3)$, $B=(7,0)$
c) $A=(-4,1)$, $B=(2,-2)$
d) $A=\left(2\sqrt{5},\sqrt{2}+1\right)$, $B=\left(\sqrt{5},1+3\sqrt{2}\right)$

7.12. Dane są punkty $A=(1,-1)$, $B=(3,3)$ oraz $C=(-2,5)$. Wyznacz długość wektora $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

7.13. Dane są punkty $A=(-3,2)$, $B=(1,4)$, $C=(-1,-1)$. Oblicz współrzędne i długości podanych wektorów.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
b) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$
c) $\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}$

7.14. Dane są wektory $\vec{v}=[1,-3]$, $\vec{u}=[2,-1]$, $\vec{w}=[-4,2]$. Oblicz długość wektora $\vec{m}=2\vec{u}-\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}$.

7.15. Wykaż, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A=(-2,1)$, $B=(2,3)$, $C=\left(\sqrt{3},2-2\sqrt{3}\right)$ jest trójkątem równobocznym. Oblicz jego pole.

7.16. Wyznacz współrzędne wierzchołka D równoległoboku $ABCD$, jeśli $A=(2,-10)$, $B=(7,0)$, $C=(-2,4)$.

D **7.17.** Wykaż, że trójkąt KLM o wierzchołkach $K=(6,19)$, $L=(7,6)$, $M=(17,12)$ jest równoramienny.

D **7.18.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(4,1)$, $B=(6,5)$, $C=(-2,2)$, $D=(-4,-2)$ jest równoległobokiem.

7.19. W równoległoboku $ABCD$ dany jest punkt $A=(2,2)$ oraz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}=[8,1]$ i $\overrightarrow{AC}=[4,5]$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

7.20. Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(2,3)$, $B=(15,4)$, $C=(22,15)$, $D=(9,14)$ jest kwadratem.

D **7.21.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(-5,2)$, $B=(-1,4)$, $C=(2,10)$, $D=(-2,8)$ nie jest rombem.

D **7.22.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(6,-1)$, $B=(1,5)$, $C=(-5,0)$, $D=(0,-6)$ jest kwadratem.

Prosto do matury

1. Dane są punkty $A=(8,-3)$, $B=(-7,5)$. Wyznacz współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

2. Znając współrzędne wektora $\overrightarrow{PQ}=\left[\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right]$ oraz współrzędne punktu $Q=\left(-3\sqrt{3},5\sqrt{2}\right)$, wyznacz współrzędne punktu P.

3. Dane są punkty $A=(5,-11)$, $B=(0,-4)$, $C=(7,0)$. Wyznacz współrzędne takiego punktu P, aby spełniona była równość $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$.

D **4.** Punkty $A=(-5,2)$, $B=(2,-2)$ i $D=(-4,10)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C. Wykaż, że ten równoległobok jest rombem i oblicz jego pole.

D **5.** Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A=(-10,-3)$, $B=(8,3)$, $C=(4,15)$, $D=(-14,9)$ jest prostokątem.

8. Wektory – zastosowanie w zadaniach

Umiejętności:
- geometryczna interpretacja działań na wektorach
- stosowanie wektorów w zadaniach geometrycznych

Wektor $\overrightarrow{AB}$ jest uporządkowaną parą punktów. Takie uporządkowanie możemy w naturalny sposób zinterpretować jako funkcję, która punktowi A przyporządkowuje punkt B.

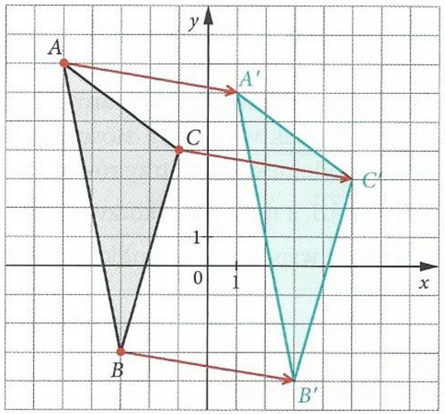
Definicja

Przesunięciem równoległym o wektor $\vec{u}$ nazywamy przekształcenie, w którym obrazem punktu A jest taki punkt B, że $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Przykład 1

Trójkąt ABC o wierzchołkach $A=(-5,7)$, $B=(-3,-3)$, $C=(-1,4)$ został przesunięty o wektor $\vec{u}=[6,-1]$.
Jeżeli oznaczymy wierzchołki obrazu tego trójkąta odpowiednio A', B', C', to $A'=(1,6)$, $B'=(3,-4)$, $C'=(5,3)$.

Zauważmy, że skoro $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, to z definicji równości wektorów wynika, że również $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ oraz $|AB|=|A'B'|$.
Podobnie $|AC|=|A'C'|$ i $|BC|=|B'C'|$.
Zatem trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $A'B'C'$.



Wniosek

Figura F i jej obraz F' w przesunięciu równoległym są przystające.

Bezpośrednio z definicji mnożenia wektora przez liczbę wynika, że dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \neq 0$ spełniająca równość

$$\vec{u} = k \cdot \vec{w}.$$

Na przykład:

- wektor $\vec{v} = [-2, 9]$ jest równoległy do wektora $\vec{w} = [6, -27]$, bo $\frac{6}{-2} = -3 = \frac{-27}{9}$, czyli $\vec{w} = -3 \cdot \vec{v}$,
- wektor $\vec{u} = [8, 5]$ nie jest równoległy do wektora $\vec{w} = [6, -27]$, ponieważ $\frac{6}{8} \neq \frac{-27}{5}$.

Korzystając z tej własności, możemy badać współliniowość punktów danych w układzie współrzędnych.

Przykład 2

Zbadamy, czy punkty $A = (-2, 1)$, $B = (3, 3)$ oraz $C = (33, 15)$ są współliniowe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że aby odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy sprawdzić równoległość wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = [5, 2]$, $\overrightarrow{AC} = [35, 14]$, zatem

$\overrightarrow{AC} = 7 \cdot \overrightarrow{AB}$.

Odp.: Punkty A, B, C są współliniowe.

> Aby zbadać współliniowość punktów A, B, C, możemy sprawdzać równoległość różnych par wektorów, np.: pary $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ albo pary $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ itd.

Korzystając z równości wektorów, możemy wyznaczać współrzędne punktów dzielących odcinek w różnych stosunkach. Na przykład, aby wyznaczyć punkty M i N dzielące odcinek AB na trzy równe części, możemy najpierw wykorzystać zależność $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, a następnie skorzystać z faktu, że punkt N jest środkiem odcinka MB. Wzory na współrzędne środka odcinka warto znać na pamięć, bo często się z nich korzysta.

Twierdzenie

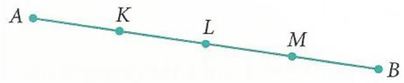
Środek odcinka o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ ma współrzędne

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Dowód zostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia.

Przykład 3

Dane są punkty $A = (1, 2)$ i $B = (13, -26)$. Wyznaczymy współrzędne punktów K, L, M, które dzielą odcinek AB na cztery równe części.



> Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

Rozwiązanie

$L = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{2-26}{2}\right) = (7, -12)$ ⟵ L jest środkiem odcinka AB

$K = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{2-12}{2}\right) = (4, -5)$ ⟵ K jest środkiem odcinka AL

$M = \left(\frac{7+13}{2}, \frac{-12-26}{2}\right) = (10, -19)$ ⟵ M jest środkiem odcinka LB

Odp.: $K = (4, -5)$, $L = (7, -12)$, $M = (10, -19)$

Przykład 4

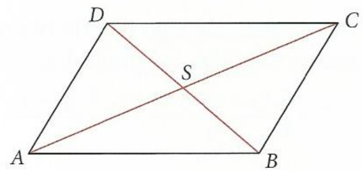
Punkty $A = (1, 13)$ i $B = (-6, 0)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (5, -2)$ jest jego środkiem symetrii. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków C i D tego równoległoboku.

Rozwiązanie

Niech $C = (x_C, y_C)$. Punkt S jest środkiem odcinka AC, więc:

$$\left(\frac{1 + x_C}{2}, \frac{13 + y_C}{2}\right) = (5, -2)$$

$$\begin{cases} \frac{1 + x_C}{2} = 5 \\ \frac{13 + y_C}{2} = -2 \end{cases}$$



Zatem $C = (9, -17)$.

Niech $D = (x_D, y_D)$. Wówczas $\overrightarrow{DC} = [9 - x_D, -17 - y_D]$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ⟵ $ABCD$ jest równoległobokiem

$[-7, -13] = [9 - x_D, -17 - y_D]$ ⟵ $\overrightarrow{AB} = [-7, -13]$

$$\begin{cases} -7 = 9 - x_D \\ -13 = -17 - y_D \end{cases}$$

Zatem $D = (16, -4)$.

Odp.: $C = (9, -17)$, $D = (16, -4)$

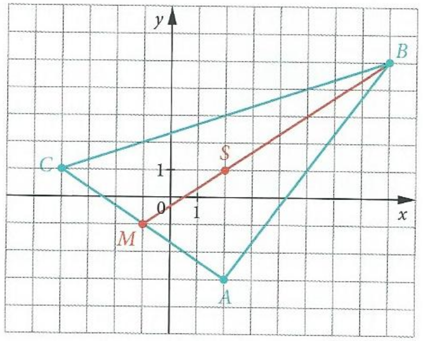
Przypomnijmy, że środkowa trójkąta jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Używając wektorów, udowodnimy teraz twierdzenie dotyczące środkowych trójkąta.

Twierdzenie

Trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten, nazywany środkiem ciężkości trójkąta, dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.

Dowód

Umieśćmy trójkąt ABC w układzie współrzędnych i wprowadźmy oznaczenia $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$. Niech punkt M oznacza środek boku AC.
Zatem $M = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$.



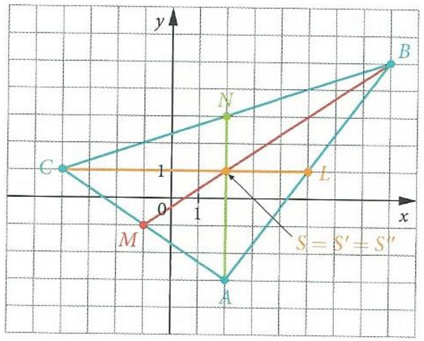
Oznaczmy przez $S = (x_S, y_S)$ punkt, który dzieli środkową BM w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.
Zatem $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

$$[x_S - x_B, y_S - y_B] = \frac{2}{3}[x_M - x_B, y_M - y_B]$$

$$\begin{cases} x_S - x_B = \frac{2}{3}\frac{x_A + x_C}{2} - \frac{2}{3}x_B \\ y_S - y_B = \frac{2}{3}\frac{y_A + y_C}{2} - \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymamy współrzędne punktu S:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$



Prowadząc analogiczne rozumowanie dla punktu S' dzielącego środkową AN w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka A) oraz punktu S'' dzielącego środkową CL w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołka C), otrzymamy taki sam wynik. Zatem $S = S' = S''$.

Punkt o współrzędnych $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka, a to oznacza, że wszystkie te środkowe przechodzą przez ten punkt.
Koniec dowodu

Wniosek

Środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ ma współrzędne

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Przykład 5

W trójkącie ABC dane są: punkt $A = (-5, 2)$, $\overrightarrow{AB} = [11, -10]$ i środek ciężkości $S = (1, 0)$. Wyznaczymy współrzędne wierzchołków B i C.

Rozwiązanie

Niech $B = (x_B, y_B)$.

$$[11, -10] = [x_B + 5, y_B - 2]$$

$$\begin{cases} x_B + 5 = 11 \\ y_B - 2 = -10 \end{cases}, \text{ stąd } B = (6, -8).$$

Do obliczenia współrzędnych wierzchołka C zastosujemy wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta.

$$(1, 0) = \left(\frac{-5 + 6 + x_C}{3}, \frac{2 - 8 + y_C}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 3 = 1 + x_C \\ 0 = -6 + y_C \end{cases}, \text{ stąd } C = (2, 6).$$

Odp.: $B = (6, -8)$, $C = (2, 6)$

ZADANIA

8.1. Wyznacz współrzędne punktu M, wiedząc, że jest on obrazem punktu P w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$.

a) $P = (-1, -2)$, $\vec{u} = [3, 1]$
b) $P = (4, 0)$, $\vec{u} = [-2, \sqrt{5}]$
c) $P = (-1, 2)$, $\vec{u} = [1, -7]$
d) $P = (\sqrt{2}, -9)$, $\vec{u} = [-\sqrt{2}, -\sqrt{3}]$

8.2. Wyznacz współrzędne obrazu punktu $P = (3, -1)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\overrightarrow{AB}$, wiedząc, że $A = (6, 2)$ i $B = (2, 5)$.

8.3. Wyznacz współrzędne punktu M, wiedząc, że jego obrazem w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest punkt P.

a) $\vec{u} = [-3, 7]$, $P = (-1, -2)$
b) $\vec{u} = [3, -5]$, $P = (7, 2)$
c) $\vec{u} = [1, \sqrt{3}]$, $P = (8, 5)$
d) $\vec{u} = [-5, -9]$, $P = (-3, 4)$

8.4. Dane są współrzędne wierzchołków trójkąta ABC i trójkąta KLM. Sprawdź, czy istnieje przesunięcie równoległe, w którym obrazem trójkąta ABC jest trójkąt KLM. Jeżeli tak, podaj wektor przesunięcia.

a) $A = (-4, 5)$, $B = (-3, 1)$, $C = (1, 4)$ oraz $K = (1, 7)$, $L = (2, 3)$, $M = (6, 6)$
b) $A = (3, 7)$, $B = (3, 2)$, $C = (6, 4)$ oraz $K = (-3, 4)$, $L = (-3, -1)$, $M = (0, 1)$

8.5. Zbadaj współliniowość punktów A, B, C.

a) $A = (0, 0)$, $B = (-3, 2)$, $C = (9, -6)$
b) $A = (6, 1)$, $B = (-3, -1)$, $C = (-11, -2)$

8.6. Punkty K, L, M są współliniowe. Wyznacz niewiadomą współrzędną.

a) $K = (2, 1)$, $L = (-2, 6)$, $M = (x, -9)$
b) $K = (18, y)$, $L = (10, 2)$, $M = (-2, 8)$

8.7. Dany jest wektor $\vec{u} = [-8, 6]$. Wyznacz współrzędne wektora

a) o długości równej 1, równoległego do $\vec{u}$ oraz o zwrocie zgodnym ze zwrotem $\vec{u}$.
b) o długości równej 5, równoległego do $\vec{u}$ oraz o zwrocie przeciwnym do zwrotu $\vec{u}$.

8.8. Bok AB trójkąta ABC ma długość równą c. Punkty K, L, M są środkami odpowiednio boków AB, BC, AC. Wyznacz długość wektora $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{MC}$
b) $\vec{u} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{MA}$

8.9. Oblicz długości przekątnych równoległoboku $ABCD$, wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = [5, 3]$ oraz $\overrightarrow{AC} = [1, 4]$.

8.10. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ o wierzchołkach $A = (0, -5)$, $B = (6, 7)$, $C = (1, 7)$, $D = (-3, -1)$ jest trapezem równoramiennym.

8.11. Wyznacz środek S odcinka PQ.

a) $P = (3, -2)$, $Q = (-5, 6)$
b) $P = \left(2\frac{1}{2}, -3\right)$, $Q = \left(5\frac{1}{2}, 9\right)$

8.12. Punkty $A = (3, -5)$ i $B = (-7, 11)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a punkt $S = (-5, 0)$ jest środkiem boku CD. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D.

8.13. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (-3, 3)$, $B = (3, 5)$, $C = (-1, 7)$ jest równoramienny i oblicz jego pole.

8.14. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy dłuższa niż CD. Oblicz obwód tego trapezu, wiedząc, że $B = (5, -3)$, $\overrightarrow{CD} = [-2, 4]$ i $\overrightarrow{AC} = [6, -5]$.

8.15. Wykaż, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

8.16. Wykaż, że środki boków dowolnego rombu są wierzchołkami prostokąta.

8.17. Wyznacz środek ciężkości S trójkąta ABC.

a) $A = (-1, 2)$, $B = (3, 5)$, $C = (4, -10)$
b) $A = (-5, -6)$, $B = (-2, 4)$, $C = (16, -1)$

8.18. Wyznacz środek ciężkości S trójkąta ABC, wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = [4, 6]$, $\overrightarrow{AC} = [-7, 3]$ oraz $A = (3, -3)$.

8.19. Wyznacz wierzchołek A trójkąta ABC, wiedząc, że $B = (6, 3)$, $C = (-7, 10)$ oraz środek ciężkości tego trójkąta $S = (-2, 4)$.

8.20. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 2 - 2\sqrt{3})$, $B = (3, 2\sqrt{3} + 2)$, $C = (-3, 2)$ jest równoboczny. Wyznacz współrzędne środka S i promień R okręgu opisanego na tym trójkącie.

Prosto do matury

1. Dane są punkty $A = (-12, 7)$ i $B = (15, -5)$. Wyznacz współrzędne punktów K i L, które dzielą odcinek AB na trzy równe części.

2. Obrazem odcinka AB o końcach $A = (3, -1)$ i $B = (7, 13)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$ jest odcinek CD o środku w punkcie $L = (-11, 0)$. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{u}$ oraz współrzędne punktów C i D.

3. Zbadaj, czy punkt $Q = \left(\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ należy do prostej przechodzącej przez punkty $K = (-2, -1)$ i $L = (3, -13)$.

4. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, wiedząc, że punkty $P = (-3, 1)$, $Q = (1, 2)$, $R = (-2, -5)$ są środkami jego boków.

5. W czworokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a punkt P jest środkiem ciężkości trójkąta CDA. Wykaż, że $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.